

物理学报
Acta Physica Sinica
ISSN 1000-3290, CN 11-1958/O4

《物理学报》网络首发论文

题目：一种新的可计算可压缩流动的预处理方法
作者：刘博，邢朴，丁松，谢明军，冯林，时晓天
网络首发日期：2022-03-22
引用格式：刘博，邢朴，丁松，谢明军，冯林，时晓天. 一种新的可计算可压缩流动的预处理方法[J/OL]. 物理学报.
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1958.O4.20220321.1721.003.html>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

一种新的可计算可压缩流动的预处理方法

刘博¹⁾ 邢朴¹⁾ 丁松²⁾ 谢明军³⁾ 冯林⁴⁾ 时晓天^{1)†}

(1. 中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074

(2. 北京航空航天大学, 航空科学与工程学院, 北京 100083

(3. 北京航空航天大学, 大型飞机高级人才培训班, 北京 100083

(4. 南开大学, 数学学院, 天津 300074

摘要：针对使用可压缩流动数值方法求解不可压缩流动存在的刚性问题，基于虚拟压缩法思想，构造了一种以 Mach 数，速度，密度，温度等变量为元素的预处理矩阵，改变了控制方程组的特征根并使其量级更接近。通过理论推导与分析，证明新方法相比 Weiss, Pletcher, Dailey 和 Choi 的方法而言，不仅能降低方程组的刚性，提高了数值求解效率，而且拥有更好的稳定性，此外还能实现低速流动和高速流动之间的光滑过渡。采用有限差分格式进行离散，对流项的 Roe 格式作为基本加权无震荡(WENO)格式的求解器，粘性项则使用中心型紧致差分格式来计算，与预处理矩阵相结合展开数值实验，结果表明新预处理方法可以实现对无粘和有粘不可压缩流动问题的高精度模拟，且拥有比 Weiss 和 Pletcher 等提出的方法更好的收敛性和稳定性。

关键词：预处理技术；可压缩流动；收敛性；数值模拟

PACS: 47. 40. Dc; 47. 11. Bc; 47. 15. Rq; 47. 63. Mc

DOI:10.7498/aps.71.20220102

基金：国家自然科学基金(11872348, 11802297)

国家重点研发计划(2019YFA0405300)

†通讯作者. E-mail: xxtshi@163.com

第一作者. E-mail: 2511183021@qq.com

1 引言

计算流体力学(Computational Fluid Dynamics)是流体力学, 计算数学与计算机技术相结合而发展起来的新兴学科, 它通过数值仿真和可视化处理, 对流体流动和热传导等物理现象进行计算机数值分析和研究。其中有限差分法^{[1][2][3]}是应用最广泛, 最成的方法之一。

随着 CFD 的不断发展, 人们所求解的问题也日益复杂化, 这些问题通常归结为高速和低速流动问题, 高速流动需采用可压缩流动计算方法^{[4][5]}, 而低速流动采用不可压缩流动计算方法^{[6][7][8]}。然而, 这两种方法的特性存在很大差别, 例如, 高超声速往往伴随着如激波一类的强间断存在^[9], 亚声速流动的流场中任何微小的扰动都将影响整个流场^[10], 因此具体数值方法要在特定环境下使用。针对高速的可压缩流动数值求解问题, 学者们已研究出较成熟的理论, 而面对低速流动时, 无论采取显格式还是隐格式计算, 速度越小对计算误差和收敛速度影响越大, 这也被称为刚性问题^{[11][12]}, 这种刚性给数值方法带来了很大的困难。

同时, 不可压缩流动数值方法在实际工程应用又有很大的需求, 比如^{[13][14][15]}。在某些问题中, 还会出现高低速流动并存的现象^{[16][17][18]}。为了求解此类问题, 需要发展能够有效求解低速流动的数值方法。为了求解有很强不可压缩性的低速流动问题, Fasel^[19]提出涡函数——流函数法, Aziz 与 Hellums^[20]提出势函数——流函数法, 其本质是引入流函数和涡函数并对控制方程进行变换, 但是壁面处涡量难以处理, 而且推广到三维问题后过于复杂。F. H. Halrow 和 J. E. Wetch^[21]提出格子中标记点算法(Marker in Cell, 简称 MAC), C. W. Hirt 等^[22]则在 MAC 算法上加以改进提出 SOLA 算法, 此类方法可以有效处理含有复杂的自由面或界面的流动, 但是对时间步限制非常严格, 所以求解效率较低。Spalding

和 Patankar^[23]提出压力联系方程的半隐式法(Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations, 简称 SIMPLE 法), 该方法核心在于不断修正压力项, 通过修正后的压力求解速度并满足连续方程, 直到收敛。为了提高收敛速度, Patankar^[24]又提出 SIMPLER 算法(SIMPLE Revised), Van Doormaal J. P. 等^[25]提出 SIMPLEC(SIMPLE Consistent)算法, G. D. Raithby 等^[26]提出 SIMPLEX(SIMPLE Extrapolation)算法, Issa^[27]提出 PISO(Pressure Implicit with Splitting of Operators)算法, 他们都通过加强速度与压力的耦合来达到加速收敛。但是这类方法占用内存很大, 插值过程繁琐, 大量时间都消耗在修正压力项上, 且编程复杂。

实际上, 不可压缩流体是为了简化某些问题提出的理想模型, 任何流体都是可压缩的。而且很多时候热量的影响是不可忽略的^[28], 质量, 动量和能量方程需要耦合在一起求解。鉴于可压缩流动的数值方法相对成熟, 因此有研究者提出使用计算可压缩流动的数值方法来计算不可压缩流动问题。Chorin^[29]于 1967 年提出虚拟压缩法就是基于这种思想, 这也成为了预处理方法的雏形, 该方法另一优势是可以将高速与低速流动统一在同一算法框架下求解, 避免了切换数值方法的繁琐和交换信息而产生的精度损失。最早的预处理矩阵由 Turkle 于 1986 年提出^[30], 其核心作用在于改变时间导数项, 减小方程组特征速度的量级差异, 1993 年 Merkle^[31]等提出与 Chorin-Turkel 矩阵相似的适用于 Euler 方程的预处理矩阵。最早适用于全速域的预处理矩阵是由 Viviand^[32]设计的四参数矩阵, 但在驻点附近刚性依然很强。Van Leer、Lee 和 Roe^[32]的预处理矩阵拥有更多的参数组合。针对 N-S 方程, Choi 等^[33]和 Venkateswaran 等^[34]提出了考虑 Reynolds 数的影响的预处理矩阵, Godfrey^[35]等提出的矩阵将 Euler 处理矩阵结合了离散方程的粘性/无粘性的块 Jacobi 矩阵, 但仍然难以降低驻点附近的刚性。Weiss 等^[36], Pletcher

等^[37]提出的矩阵形式简单,且降低了驻点附近刚性,被广泛的应用于 FLUENT, OVERFLOW 等商业软件。Dailey 等^[38]提另一种矩阵并将其与多重网格法结合。且预处理方法不仅可以与有限差分法搭配,也可以与有限体积法^[39], 间断有限元法^[40]搭配,此外也可以与双时间步技术结合用于计算非定常问题^[41]。

本文提出一种新的预处理矩阵,该矩阵引入了两个关于 Mach 数的函数 b 和 M_L ,使得方程组的刚性进一步降低,在确保(甚至能提高)精度和稳定性前提下加速了收敛速度,并且在高速与低速流动之间过渡更加光滑(其中 M_L 在有粘和无粘情况下拥有不同的形式)。通过数值实验,初步证明了本文方法的可靠性,并与其他方法相对比,体现本文方法的优势。

2 基本概念

2.1 物理量的无量纲化

为了方便实现数值实验的相似模拟,本文对变量采取了如下无量纲化处理。

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, z = \frac{z^*}{L}, \bar{t} = \frac{t^*}{L/c_\infty} \\ u &= \frac{u^*}{c_\infty}, v = \frac{v^*}{c_\infty}, w = \frac{w^*}{c_\infty}, g = \frac{g^*}{g_\infty} \\ p &= \frac{p^*}{\rho_\infty c_\infty^2}, \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, E = \frac{e^*}{\rho_\infty c_\infty^2} \\ c &= \frac{c^*}{c_\infty}, T = \frac{T^*}{T_\infty}, \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty} \end{aligned}$$

其中,上标“*”代表有量纲量,下标“ ∞ ”代表参考值, g 代表重力加速度, E 为单位体积流体的总能量, μ 为粘性系数,下文 2.2 节中的 Re 为来流 Reynolds 数, $Re = \rho_\infty c_\infty L / \mu_\infty$ 。

2.2 流体力学控制方程组

Navier-Stokes 方程组是流体动力学中最重要的基本方程，它是粘性流体微团应用牛顿第二定律得到的运动微分方程。以三维可压缩流动的情形为例，忽略外加热源和彻体力的无量纲化方程：

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho |\mathbf{U}|^2}{2} \\ \mathbf{Q} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T \\ \mathbf{E} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, [(E+p)u])^T \\ \mathbf{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, [(E+p)v])^T \\ \mathbf{G} &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E+p)w)^T \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

粘性应力项与热传导流通量为

$$\begin{aligned} \tau_{ik} &= \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] \\ q_j &= \frac{-\mu}{(\gamma-1)Ma_\infty^2 \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned}$$

\mathbf{U} 代表速度矢量，对于无粘流动，(1)式的右端为零。在实际的应用中，经常会用到曲线坐标系形式的方程组，具体如下：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}_v}{\partial \zeta} \right) \quad (2)$$

这里 (ξ, η, ζ) 为曲线坐标系.

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}, \quad \hat{Q} = \frac{1}{J} Q \\
 \hat{E} &= \frac{1}{J} (\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F + \xi_z G) \\
 \hat{F} &= \frac{1}{J} (\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F + \eta_z G) \\
 \hat{G} &= \frac{1}{J} (\zeta_t Q + \zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G) \\
 \hat{E}_v &= \frac{1}{J} (\xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v) \\
 \hat{F}_v &= \frac{1}{J} (\eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v) \\
 \hat{G}_v &= \frac{1}{J} (\zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v)
 \end{aligned}$$

本文采用的是方程组(2), 并取 $\tau = t$, 后文将省略该方程组中变量的上标“^”.

3 方程组的刚性问题

3.1 预处理方法

使用与时间相关的可压缩流动数值方法来求解不可压缩流动时, 方程组的特征根量级差异过大(也称刚性过大), 这会严重影响计算的收敛性. 基于虚拟压缩法原理的预处理法可以有效地解决这一问题, 即在时间导数项前乘上个预处理矩阵, 改变方程组的特征系统. 虽然改变了方程组形式, 但对于定常问题而言, 经过足够长的时间后取得的收敛解不会受此影响. 为了更好地计算粘性問題, 通常在带预处理矩阵的控制方程中使用原始变量 $Q_T = (p, u, v, T)^T$, 下面以二维带预处理矩阵的有粘性控制方程为例:

$$\Gamma \frac{\partial Q_T}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} \right) \quad (3)$$

其中各变量与通量意义同前文所述, Γ 是预处理矩阵, 其形式有多种, 常见的形式有 Weiss-Smith 矩阵^[36]:

$$\Gamma_{\text{ws}} = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & \rho_T \\ \Theta u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \Theta v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \Theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T q \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中,

$$q = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

$$H = \frac{c^2}{\gamma - 1} + q$$

$$\Theta = \frac{1}{U_r^2} + \frac{\gamma - 1}{c^2}, \quad U_r = \min \left\{ \max \{ |\mathbf{U}|, k_0 |\mathbf{U}_\infty| \}, c \right\} \quad (5)$$

k_0 通常取 1, 如果是有粘方程, 还要限制:

$$U_r = \max \left\{ U_r, \frac{\mu}{\rho \Delta L} \right\} \quad (6)$$

eiss 等构造参考速度 U_r , 是为了既能在 Ma 较大时, 让预处理矩阵还原成非预处理状态, 又能 Ma 较小时, 减小方程组刚性。此外, 对于粘性流动而言, 还需要限制 U_r 不小于局部扩散速度 $\mu / \rho \Delta L$, 这种限制在扩散作用为主导且网格间距较小的情况下是有必要的。对预处理后的特征根的讨论详见 3.2 节。

Pletcher-Chen 矩阵^[37]:

$$\Gamma_{\text{PC}} = \begin{pmatrix} \Omega_{\text{PC}} & 0 & 0 & \rho_T \\ \Omega_{\text{PC}} u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \Omega_{\text{PC}} v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \Omega_{\text{PC}} H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T q \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中

$$\Omega_{\text{PC}} = \frac{\gamma(\gamma - 1)Ma^2 + 1}{\gamma |\mathbf{U}|^2} = \frac{1}{\gamma |\mathbf{U}|^2} + \frac{\gamma - 1}{c^2} \quad (8)$$

Choi-Merkle 矩阵^[33]:

$$\Gamma_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta Ma_r^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\beta Ma_r^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{\beta Ma_r^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{H}{\beta Ma_r^2} - 1 & \rho u & \rho v & \frac{\rho}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中,

$$\beta Ma_r^2 = \min \left\{ c^2, \max \left\{ c^2 Ma^2 \left(1 + \frac{1 - Ma_0^2}{Ma_0^4} Ma^2 \right), k_2^2 |\mathbf{U}_\infty|^2 \right\} \right\} \quad (10)$$

Ma_0 是参考 Mach 数, k_2 是常数, 通过大量实验发现, Ma_0 取 0.5, k_2 在 Euler 方程时取 0.5, N-S 方程时 1 的稳定性良好. 该方案是 Turkle^[31]提出的, 其作用是避免驻点附近预处理矩阵的奇异性, 对 βMa_r^2 实施一定的人为控制.

3.2 特征系统分析

如果不预处理, 则方程(3)应该为:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_T} \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} \right) \quad (11)$$

将(11)式等号左端全部替换成以 \mathbf{Q}_T 为变量的形式:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_T} \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Q}_T} \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_T} \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} \right) \quad (12)$$

即

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial t} + P_0^{-1} A \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial \xi} + P_0^{-1} B \frac{\partial \mathbf{Q}_T}{\partial \eta} = \frac{P_0^{-1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} \right) \quad (12a)$$

其中守恒变量 \mathbf{Q} 到原始变量 \mathbf{Q}_T 的 Jacobi 变换矩阵为:

$$P_0 = \begin{pmatrix} \rho_p & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T q \end{pmatrix} \quad (13)$$

下面以直角坐标系的 ξ 方向为例分析预处理前后方程组的特征系统.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\gamma U}{T} & \rho \xi_x & \rho \xi_y & -\frac{\rho U}{T} \\ \frac{\gamma u U}{T} + \xi_x & \rho(U + \xi_x u) & \rho u \xi_y & -\frac{\rho u U}{T} \\ \frac{\gamma v U}{T} + \xi_y & \rho v \xi_x & \rho(U + \xi_y v) & -\frac{\rho v U}{T} \\ \frac{\gamma U H}{T} & \rho(\xi_x H + u U) & \rho(\xi_y H + v U) & -\frac{\rho U q}{T} \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad q = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad H = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + q \quad (15a)$$

$$\rho_p = \frac{\rho}{p}, \quad \rho_T = -\frac{\rho}{T}, \quad C_\xi = c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (15b)$$

可以求得 $P_0^{-1}A$ 的特征根为:

$$\lambda_{1,2} = U, \quad \lambda_{3,4} = U \pm C_\xi \quad (16)$$

特别的, 当 $\xi = x, \eta = y$ 时有:

$$\lambda_{1,2} = u, \quad \lambda_{3,4} = u \pm c \quad (16a)$$

条件数通常用来衡量方程组的刚性大小, 当 $u \rightarrow 0$ 时:

$$C_N = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = \frac{|u| + c}{|u|} = 1 + \frac{1}{Ma_x} \quad (17)$$

假如快波传输了 1 个网格的长度, 则有:

$$h = \lambda_{\max} \Delta t, \quad \lambda_{\min} \Delta t = \frac{h}{C_N} \quad (18)$$

可见, 当条件数非常大时, 相同时间内快慢波传播的距离会相差很多数量级, 这

给方程的求解造成很大困难. 如果使用预处理矩阵替换 P_0 , 则由 Weiss, Pletcher 和 Choi 等人提出的预处理法得到的特征根都有相同的形式.

$$\frac{1+f}{2}u \pm \sqrt{\left(\frac{1+f}{2}u\right)^2 + (c^2 - u^2)f} \quad (19a)$$

其中 f 是关于 Ma 的函数, 虽然每种预处理法都不一样, 但该函数都是改变特征根的关键所在. 以 Weiss-Smith 形式为例.

$$\lambda_{1,2} = u, \lambda_{3,4} = \frac{(1 + Ma_{ws}^2)u}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - Ma_{ws}^2)^2 u^2 + 4Ma_{ws}^2 c^2} \quad (19b)$$

其中 U_r 同(5)式:

$$Ma_{ws} = \frac{U_r}{c} \quad (20)$$

当 Mach 数很小的时候, 特征根依然能保持在相近的量级范围内, 刚性得到降低, 条件数的取值范围被限制在 $1 < C_N \leq 2$ 内. 为避免驻点附近预处理矩阵的奇异性, Turkle 等对预处理参数引入了(10)式的处理方法. 但是, 将经(10)式处理后的特征根看做 Ma 的函数时, 该函数在 Ma_0 处连续但不可导, 这会导致当速度接近 $Ma_0 c$ 时, 控制方程从预处理到关闭预处理的过度不够光滑, 可能导致误差放大.

对此, 本文设计了一种新的预处理矩阵, 使得方程组在预处理与非预处理之间的过度更加光滑, 并进一步降低了特征系统的条件数, 从而增加收敛效率, 并且拥有良好的精度和稳定性.

3.3 新预处理矩阵的提出

Turkle 曾在 Weiss-Smith 矩阵基础上加以改进, 增加一个参数从而提高预处理矩阵的灵活性, 其矩阵具体如下:

$$\Gamma_{\text{Tur}} = \begin{pmatrix} \Omega_{\text{Tur}} & 0 & 0 & \frac{C_p}{T} \left(\frac{\delta}{c^2} - \frac{\rho}{C_p} \right) \\ \Omega_{\text{Tur}} u & \rho & 0 & u \frac{C_p}{T} \left(\frac{\delta}{c^2} - \frac{\rho}{C_p} \right) \\ \Omega_{\text{Tur}} v & 0 & \rho & v \frac{C_p}{T} \left(\frac{\delta}{c^2} - \frac{\rho}{C_p} \right) \\ \Omega_{\text{Tur}} H - 1 & m & n & \frac{\delta}{c^2} + \frac{Ma^2}{2} \left(\frac{\delta}{c^2} - \frac{\rho}{C_p} \right) \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中

$$\Omega_{\text{Tur}} = \frac{1}{\beta Ma_r^2} - \frac{1}{\gamma p} \left(\frac{\delta}{c^2} - \frac{\rho}{C_p} \right) \quad (22)$$

其中 δ 为根据求解需要选定的 0~1 之间的常数， βMa_r^2 同(10)式。本文受 Turkel 引入调节参数 δ 的启发，引入调节函数 b_1, b_2 和 Ω_L ，这些函数会随着流场中某些物理量的变化而变化，从而可实现对预处理矩阵动态调控，具体形式如下：

$$\Gamma_{\text{Liu}} = \begin{pmatrix} \Omega_L & 0 & 0 & \rho_T \\ \left(\Omega_L - \frac{b_1}{c^2 M_L^2} \right) u & \rho & 0 & \rho_T u \\ \left(\Omega_L - \frac{b_2}{c^2 M_L^2} \right) v & 0 & \rho & \rho_T v \\ \Omega_L H - 1 & \rho u & \rho v & \rho_T \frac{u^2 + v^2}{2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

其中：

$$\Omega_L = \frac{1}{c^2 M_L^2} + \frac{\gamma - 1}{c^2} \quad (24a)$$

$$M_L = \min \{ \max \{ Ma, \varepsilon_m \}, 1 \} \quad (24b)$$

ε_m 是防止 $M_L = 0$ 的一个小量，本文取 $\varepsilon_m = 10^{-6}$ 。若 Reynolds 数较小，则需限制其不小于局部扩散速度，同时既要避免驻点附近的奇异性，又要保证 M_L 函数的光滑性，还要保证后文中伪声速 C_x' 的光滑性，转化为数学分析语言：

1) . M_L 函数在(0, 1)上为单调递增的至少 C_1 连续函数, 且 $M_L'(1) = 0$.

2) . 当 $x \rightarrow 0$ 时, $M_L(x) \rightarrow 0$; $M_L(1) = 1$.

3) . 若 $M_L \leq \mu/(\rho c \Delta L)$, 则 $M_L = \mu/(\rho c \Delta L)$; 若 $M_L \geq 1$ 时, 则 $M_L = 1$.

根据以上原则构造出如(24c)的 M_L 函数, 其中 ε_m 同(24b):

$$M_L = \max \left\{ \min \left\{ \max \left\{ Ma \sqrt{1 + Ma^2 - Ma^4}, \varepsilon_m \right\}, 1 \right\}, \frac{\mu}{\rho c \Delta L} \right\} \quad (24c)$$

b_1, b_2 是与 Ma 相关的函数, 可以相等也可以不相等, 在本文中取 $b_1 = b_2 = b$, 具体的有

$$b = 2B - M_L^2 - 1 \quad (25a)$$

为了在低速时进一步降低方程组刚性, 在高速时还原成原方程, 需使得

$$\lim_{Ma \rightarrow 0} \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = 1$$

$$Ma \geq ma_0 > 1 \text{ 时, } \frac{|\lambda_{\max}|}{|U|} = 1 + \frac{1}{Ma}, \frac{|\lambda_{\min}|}{|U|} = 1 - \frac{1}{Ma}$$

故 B 函数应满足:

- 1) . 当 $Ma = 0$ 时, $B = 0$; 当 $Ma \geq ma_0$ 时, $B = 1$.
- 2) . 当 $0 < Ma \leq ma_0$ 时, B 是关于 Ma 的严格单调递增的至少 C_2 连续函数.
- 3) . $B'(0) = B''(0) = B'(ma_0) = B''(ma_0) = 0$.
- 4) . 在全 Mach 数范围内, 需要满足 $\lambda_3 > \lambda_{1,2} > |\lambda_4|$.
- 5) . 在 $Ma < ma_0$ 时, 要求 $\lambda_3/\lambda_{1,2}, |\lambda_4|/\lambda_{1,2}$ 分别是关于 Ma 的单调递增, 递减函数.
- 6) . 在 $Ma > ma_0$ 时, 要求 $\lambda_3/\lambda_{1,2}, |\lambda_4|/\lambda_{1,2}$ 分别逼近未经预处理时的 $\lambda_3/\lambda_{1,2}, |\lambda_4|/\lambda_{1,2}$.
- 7) . 使 B 函数在左右端点 $Ma = 0$ 和 $Ma = ma_0$ 附近应保持变化缓慢, 从而抑制速度 u 在低 Mach 数和临界点处由于预处理作用而出现的剧变.
- 8) . 与(24c)的 M_L 匹配, 使得后文中伪声速 C_x' 具备良好的光滑性.

按照以上 8 条要求, 本文构造了如(25b)式的 B 函数:

$$B = \max \left\{ \frac{Ma^{n_1+1} / ma_0}{Ma^{n_1} - Ma \cdot ma_0^{n_1-2} (ma_0 - Ma) + C_L (ma_0 - Ma)^{n_2}}, 1 \right\} \quad (25b)$$

其中 ma_0 是事先给定的常数, n_1, n_2 是正整数, C_L 是常数. 为了使 B 满足上述 5)-7) 性质, 且尽可能使特征根差异最小, 并使经与处理后的特征根满足 $\lambda_3 > \lambda_{1,2} > |\lambda_4|$, 计算无粘和粘性很小的流动时, 本文选择:

$$n_1=0, n_2=4, C_L=0.5, ma_0=1.73 \quad (26a)$$

如果粘性不可忽略, 可以令:

$$n_1=1, n_2=3, C_L=1, ma_0=1.73 \quad (26b)$$

函数 B 的图像可见图 1(d). 通过简单运算可知该矩阵的行列式为

$$|\Gamma_{\text{Liu}}| = \frac{\rho^3 (1 + b(\gamma - 1) Ma^2)}{(\gamma - 1) c^2 M_L^2} > 0 \quad (27)$$

可见, 该矩阵恒为可逆矩阵. 此时的预处理矩阵在计算低速问题时效果较好, 如果用于跨声速和全速域问题的计算, 可以选取 $ma_0 = Ma_{\text{max}}$ (此最大 Mach 数是实验前的估计值).

3.4 经新预处理法后的特征系统

3.4.1 特征值和方程组刚性

下面来定量分析该处理法得到的特征系统. 在二维曲线坐标系 (ξ, η) 中, 以 ξ 方向为例, 求出经 Γ_{Liu} 预处理后 Euler 方程的特征根:

$$\lambda_{1,2} = U, \quad \lambda_{3,4} = U' \pm C'_\xi \quad (28)$$

其中伪速度和伪声速分别为:

$$U' = \frac{M_L^2 + b + 1}{2} U = BU \quad (29a)$$

$$C_{\xi}' = \sqrt{(BU)^2 + M_L^2 (C_{\xi}^2 - U^2)} \quad (29b)$$

U, C_{ξ} 意义同(16)式, 预处理参数选用(26a), 且 U 在 $(0, ma_0U)$ 上时, λ_3 为关于 Ma 的单调递增函数, 与未经预处理时特征根随速度 U 增加而变化的趋势一致. 经过 Γ_{Liu} 预处理后的特征根受两个函数 B 和 M_L 调控, 形式上比 Weiss, Pletcher 和 Choi 等得到的特征根(19a)拥有更多自由度. 当 $Ma \rightarrow 0$ 时有:

$$\lim_{Ma \rightarrow 0} \frac{\lambda_3}{\lambda_{1,2}} = 1, \quad \lim_{Ma \rightarrow 0} \frac{\lambda_4}{\lambda_{1,2}} = -1 \quad (30)$$

此时所有特征根在不考虑正负号的情况下为等价无穷小, 即在 Ma 很小的时候, 条件数趋于 1. 先证明对于任意 $Ma > \varepsilon_m$ 有, $\lambda_3 > \lambda_{1,2} > |\lambda_4|$

当 $Ma \leq 1$ 时:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3}{\lambda_{1,2}} &= B + \sqrt{B^2 + M_L^2 \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} \\ &= B + \sqrt{B^2 + (1 + Ma^2 (1 - Ma^2)) (1 - Ma^2)} > 1 \end{aligned}$$

当 $1 < Ma \leq ma_0$ 时:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3}{\lambda_{1,2}} &= B + \sqrt{B^2 + M_L^2 \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} \\ &= B + \sqrt{B^2 + \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} > 1 \end{aligned}$$

当 $Ma > ma_0$ 时:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3}{\lambda_{1,2}} &= B + \sqrt{B^2 + M_L^2 \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} \\ &= 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} = 1 + \frac{1}{Ma} > 1 \end{aligned}$$

由此可知对于任意 $Ma > \varepsilon_m$ 有 $\lambda_3 > \lambda_{1,2}$, 同理可证 $\lambda_{1,2} > |\lambda_4|$, 这也与未经预处理的特征根的大小关系一致, 图 1(e)更直观地展示了预处理后的特征根大小关系. 如果

$ma_0 > \sqrt{3}$ 则会出现 $Ma_0 > \varepsilon_m$, 使得 $\lambda_3 < \lambda_{1,2}$, 因此需要限制 $ma_0 \leq \sqrt{3}$, 故上文选取 $ma_0 = 1.73$. $\lambda_3, \lambda_{1,2}$ 恒为正值. 当 $Ma < 1$ 时, $\lambda_4 < 0$; 当 $Ma > 1$ 时, $\lambda_4 > 0$, 与未经预处理时特征根的符号相同. 特殊的, 选取直角坐标系, 可以求出其特征系统的条件数满足:

$$C_N = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = \frac{\lambda_3}{|\lambda_4|} = \frac{M_L^2 \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)}{\left(\sqrt{B^2 + M_L^2 \left(\frac{1}{Ma^2} - 1 \right)} - B \right)^2}$$

当 $Ma > ma_0$ 时, 预处理矩阵退化成 P_0 , 方程恢复成原控制方程. 图 1 为控制方程经 $\Gamma_{WS}, \Gamma_{PC}, \Gamma_{CM}, \Gamma_D$ 以及 Γ_{Liu} 预处理后系统的条件数随 Ma 的发展趋势. 从图 1 中可见, Γ_D 在 Ma_∞ 附近效果良好, 在驻点处刚性很大, 经 Γ_{Liu} 处理后的系统刚性小于其他方法, 且特征根随着 Mach 数从附近增大到 $Ma > ma_0$ 时的变化过程是光滑的, 当 Ma 超过 ma_0 后, 伪速度和伪声速都还原成真实速度和声速. 由于

$$\Delta t = \frac{CFL \min \{ \Delta x, \Delta y \}}{|\lambda_{\max}|} \quad (31)$$

保证稳定的条件下, CFL 数固定时, $|\lambda_{\max}|$ 减小可以增大时间步长, 从而达到加速效果.

3.4.2 特征根的连续性

下面证明特征根 λ_i 关于 (ξ, η) 的连续性, 以直角坐标系的 x 方向为例, 注意到(18)中 U', C'_x 是关于 Ma 以 1 和 ma_0 为分界点的分段函数, 只需要证明分界点处连续性. 经无量纲化后, 不考虑 y 方向的速度影响, 则有 $Ma = U = u$, 从而 U', C'_x 均可视为 Ma (或 u) 的函数, 那么有:

$$\begin{cases} \frac{\partial U'}{\partial x} = \frac{dU'}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = \frac{dU'}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 U'}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{cases} \quad (32)$$

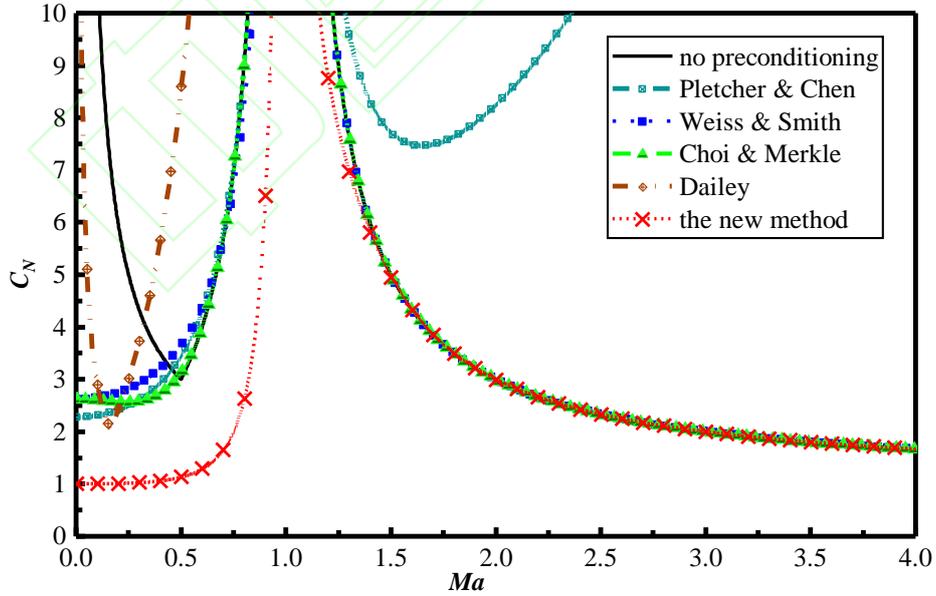
当 u 存在关于 x 的二阶连续偏导数时, 只需验证 U' 关于 u 的可导性. 对(29a)和(29b)式分别在 $(0,1)$, $(1,ma_0)$, $(ma_0,+\infty)$ 上关于 u 求导, 可得

$$\frac{dU'}{du} = \frac{dB}{du} u + B, \quad \frac{d^2 U'}{du^2} = \frac{d^2 B}{du^2} u + 2 \frac{dB}{du} \quad (33)$$

而 B 在 $(0,+\infty)$ 上存在关于 u 的二阶连续导函数, 那么易证:

$$\left. \frac{dU'}{du} \right|_{u \rightarrow 1^-} = \left. \frac{dU'}{du} \right|_{u \rightarrow 1^+}, \quad \left. \frac{d^2 U'}{du^2} \right|_{u \rightarrow ma_0^-} = \left. \frac{d^2 U'}{du^2} \right|_{u \rightarrow ma_0^+} \quad (34)$$

即 U' 存在关于 x 的二阶连续偏导数, 同理可证 C'_x 也存在关于 x 的二阶连续偏导数. 即经 Γ_{Liu} 预处理后得到的, 只要 u 存在关于 x 的二阶连续导数, λ_i 亦存在关于 x 的二阶连续导数. 从而克服了 Γ_{ws} , Γ_{PC} 和 Γ_{CM} 预处理后的特征根, 在预处理和非预处理间过渡不够光滑的缺陷, 图 1(a)-(c)也可反映出这点.



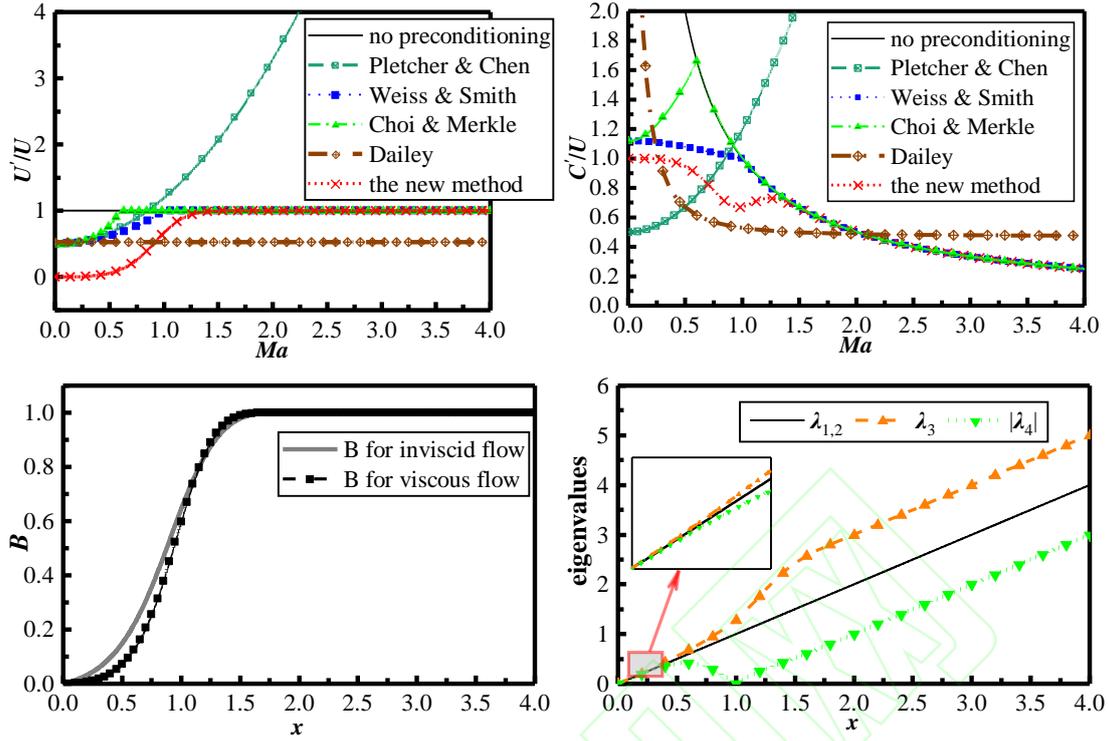


图1 经不同预处理方法后的特征系统 (a) 条件数 C_N ; (b) 伪速度 U' ; (c) 伪声速 C' ;

(d) B 函数; (e) 本文预处理法得到的特征根

Fig 1 The characteristic system of the governing equations obtained after different preconditioning

(a) Condition number; (b) pseudo-speed; (c) pseudo-sound speed

(d) function B ; (e) The eigenvalues obtained after preconditioning in this paper

注: 对于每种预处理后的速度有, $U'=(\lambda_3+\lambda_4)/2$, $C'=|\lambda_3-\lambda_4|/2$, 均为无量纲化速

4 数值求解

4.1 空间离散

本文采用 Roe 的通量差分格式作为 Riemann 求解器^[42], 下面以 ξ 方向介绍该方法, 其他方向与之同理. 带预处理的 Roe 格式可以表示为:

$$E_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[E(Q^L) + E(Q^R) - \tilde{A}(Q^R - Q^L) \right]_{i+\frac{1}{2}} \quad (35)$$

其中

$$\tilde{A} = \Gamma M_F |A_F| M_F^{-1} \quad (36)$$

A_F 是 $\Gamma_{\text{Liu}} A$ 的特征根即(28)式组成的对角矩阵, A 的意义同(14), M_F 是将其化为

对角矩阵的变换矩阵，即

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{M}_r^{-1} \mathbf{\Gamma}_{\text{Liu}} \mathbf{A} \mathbf{M}_r \quad (37)$$

此处 $|\mathbf{A}_r|$ 表示将该矩阵所有元素取绝对值后组成的矩阵. 高精度的通量 $\mathbf{E}(\mathbf{Q})^L$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{Q})^R$ 采用5阶WENO-JS格式来求得, 此过程可详见^[43]. 对于粘性项的离散, 本文采取一种4阶紧致的中心差分格式, 具体可见^[44].

4.2 时间推进

为了与空间离散的精度相匹配, 本文采取三阶显式Runge-Kutta法做时间推进^[45].

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_j^{n(1)} = \mathbf{Q}_j^n + \Delta t L_h(\mathbf{Q}_j^n) \\ \mathbf{Q}_j^{n(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{Q}_j^n + \frac{1}{4} \mathbf{Q}_j^{n(1)} + \frac{\Delta t}{4} L_h(\mathbf{Q}_j^{n(1)}) \\ \mathbf{Q}_j^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{Q}_j^n + \frac{2}{3} \mathbf{Q}_j^{n(2)} + \frac{2\Delta t}{3} L_h(\mathbf{Q}_j^{n(2)}) \end{cases} \quad (38)$$

其中 $L_h(\mathbf{Q}_j^n)$ 为 \mathbf{Q}_j^n 关于空间的离散格式.

4.3 非定常问题的时间推进

本文仅是对新预处理法的合理性和可靠性进行检验, 故选取较为简单的定常流动来验证. 如用于非定常流动计算, 预处理会破坏时间精度, 因此需要做特殊处理. 这里介绍一种应用较广泛的双时间步法, 其本质是在控制方程中填入一项关于伪时间 τ 的导数项, 并对其做预处理, 即

$$\mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{Q}_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right)$$

其中 τ 和 t 分别是伪时间和真实物理时间, 其余物理量同(3)式所述. 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 上式因左边的第一项消失而复原为方程. 分别对 τ 和 t 离散, 该方法包含两个循环, 即伪时间 τ 的内循环和物理时间 t 的外循环, 在每个物理时间步当作定常问题用伪时间推进求解, 无需时间精确的伪时间内迭代可以采用预处理加速

收敛. 当解的残差变化稳定后, 即达到当前物理时间步的真实解, 随即物理时间 t 外循环推进至下一步, 然后进行伪时间的内迭代并重复上述步骤, 最终得到欲求时刻的非定常解.

5 数值模拟验证

下面选取一维有精确解的方程组, 平板层流边界层, 方腔顶盖驱动, 凸鼓包管道流动等定常问题来验证本文方法的可靠性, 收敛性和稳定性. 由于 Γ_D 在远离 Ma_∞ 的效果不如其他方法, 文献[46]的实验说明了使用 Weiss & Smith 和 Choi & Merkle 矩阵的效果接近, 故本文选取 Weiss & Smith, Pletcher & Chen 和本文提出的预处理矩阵进行实验, 并对比得到的结果. 算例 5.1 采用 matlab2019 编程, 算例 5.2-5.4 采用 fortran90 编程.

5.1 精度测试

选取有定常精确解的一维 Euler 方程组, 以 $Q_t = (p, u, T)^T$ 为变量.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial W} \frac{\partial E}{\partial x} = S \quad (39)$$

$$Q = (p, u, T)^T, \quad W = (\rho, \rho u, E)^T$$

$$E = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho + E)u)^T, \quad S = (s_1, s_2, s_3)^T$$

$$\begin{cases} p = (1 + 0.2e^{-t}) / \gamma \\ u = (1 + k - e^{-t})(0.5 + kx) \\ T = 1 \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} s_1 = k \left(\frac{e^{-t}}{5} + 1 \right) (k - e^{-t} + 1) - \frac{e^{-t}}{5} \\ s_2 = \left(kx + \frac{1}{2} \right) \left[(k - e^{-t} + 1) + \left(\frac{e^{-t}}{5} + 1 \right) (e^{-t} + 2k(k - e^{-t} + 1)(k - e^{-t})) \right] \\ s_3 = k(k - e^{-t} + 1) \left[\left(kx + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) (k - e^{-t} + 1)^2 + \frac{e^{-t}}{k} \right) + \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{\left(\frac{e^{-t}}{5} + 1 \right)}{\gamma} \right] \end{cases} \quad (41)$$

其计算域为 $0 < x < 1$ ，按照精确解给出源项及边界条件，设网格数 $N = 100$ ，选取 $CFL = 1$ 。注意到 t 足够大后， p, u 和 T 在固定的 x 处均趋于常数，可认为是定常问题。选取 $k = 0.5, k = 0.04, k = 0.01, k = 0.005, k = 0.001$ 分别使用本文预处理法和无预处理来计算该问题，并计算到 $t = 100, t = 150, t = 200$ 时刻，得到的结果与精确解对比如表 1 所示，预处理的效果与未进行预处理的对比如图 2 所示。

由表 1 可见，当 $k = 0.5$ 时，速度 u 会经历从小于 1(无量纲化)到大于 ma_0 的跨越，使用本文的预处理法可以在保证精度的同时实现从预处理还原到不处理的连续过渡；在相同的计算时间 $t = 100$ 下，使用预处理方法所比未处理得到的数值解精度高出约 1~2 个量级。增加一倍的计算时间，到 $t = 200$ 时刻未用预处理的解的精度才勉强达到 $t = 100$ 时刻使用预处理的精度。当 k 进一步减小时，预处理的效果更加明显，从图 2(c)-图 2(f)可以清晰地看出，预处理比不处理收敛速度更快。这表明本文的预处理方法能够在保证精度的同时，提高计算的效率。

5.2 平板层流边界层

一长为 L 的平板静置在水平面上，从左侧的与平板平行的均匀来流通过其上表面，以板长为参考长度，以来流处的声速为参考速度进行无量纲化，给定来流

速度 $u_\infty = 0.1$ ，基于板长的 Reynolds 数 $Re_\infty = 10^6$ ，设定来流处压强和温度以及出口的压强，计算网格为 180×50 ，其中 x 方向为均匀网格， y 方向随着 y 减小而加密，贴近平板上表面的第 1 层网格厚度为 0.002， $CFL = 5$ 。计算到收敛后，选取 $x = 0.8$ 处的速度 u 随 y 分布并与 Bulsius 准解析解对比，对比结果如图 3 所示，其中

$$Re_x = \frac{Re_\infty x}{L}, \eta = \frac{y\sqrt{Re_x}}{x} \quad (42)$$

Table 1 Errors between numerical solutions and exact solutions
表 1 数值解与精确解之间的误差

	k	t	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$	$x = 1.0$
exact solution			0.89253	1.0425	1.1925	1.3050	1.4925
errors of no preconditioning	0.5	100	3.9029×10^{-5}	1.5695×10^{-5}	2.5871×10^{-5}	3.4728×10^{-5}	4.2505×10^{-5}
		150	1.1399×10^{-5}	9.3383×10^{-6}	1.3694×10^{-5}	1.8359×10^{-5}	2.2459×10^{-5}
		200	6.7822×10^{-6}	4.6281×10^{-6}	7.3170×10^{-6}	5.8126×10^{-6}	6.0973×10^{-6}
errors of preconditioning		100	3.0175×10^{-6}	9.8264×10^{-7}	2.2705×10^{-6}	1.8797×10^{-6}	2.8140×10^{-6}
exact solution			0.52790	0.53622	0.54454	0.55286	0.56118
errors of no preconditioning	0.04	100	9.3060×10^{-5}	9.3411×10^{-5}	9.3782×10^{-5}	9.4174×10^{-5}	9.4586×10^{-5}
		150	5.5757×10^{-5}	5.5289×10^{-5}	5.4841×10^{-5}	5.4415×10^{-5}	5.4010×10^{-5}
		200	4.5265×10^{-5}	4.4483×10^{-5}	4.3722×10^{-5}	4.2983×10^{-5}	4.2267×10^{-5}
errors of preconditioning		100	3.9460×10^{-6}	3.1288×10^{-6}	5.5530×10^{-7}	2.5512×10^{-6}	3.1288×10^{-6}
exact solution			0.50692	0.50894	0.51096	0.51298	0.51500
errors of no preconditioning	0.01	100	4.0176×10^{-4}	4.0335×10^{-4}	4.0494×10^{-4}	4.0652×10^{-4}	4.0811×10^{-4}
		150	2.6008×10^{-4}	2.6108×10^{-4}	2.6208×10^{-4}	2.6308×10^{-4}	2.6407×10^{-4}
		200	1.9108×10^{-4}	1.9178×10^{-4}	1.9249×10^{-4}	1.9319×10^{-4}	1.9389×10^{-4}
errors of preconditioning		100	3.3569×10^{-6}	2.2214×10^{-6}	7.5880×10^{-6}	4.8149×10^{-6}	6.3518×10^{-6}

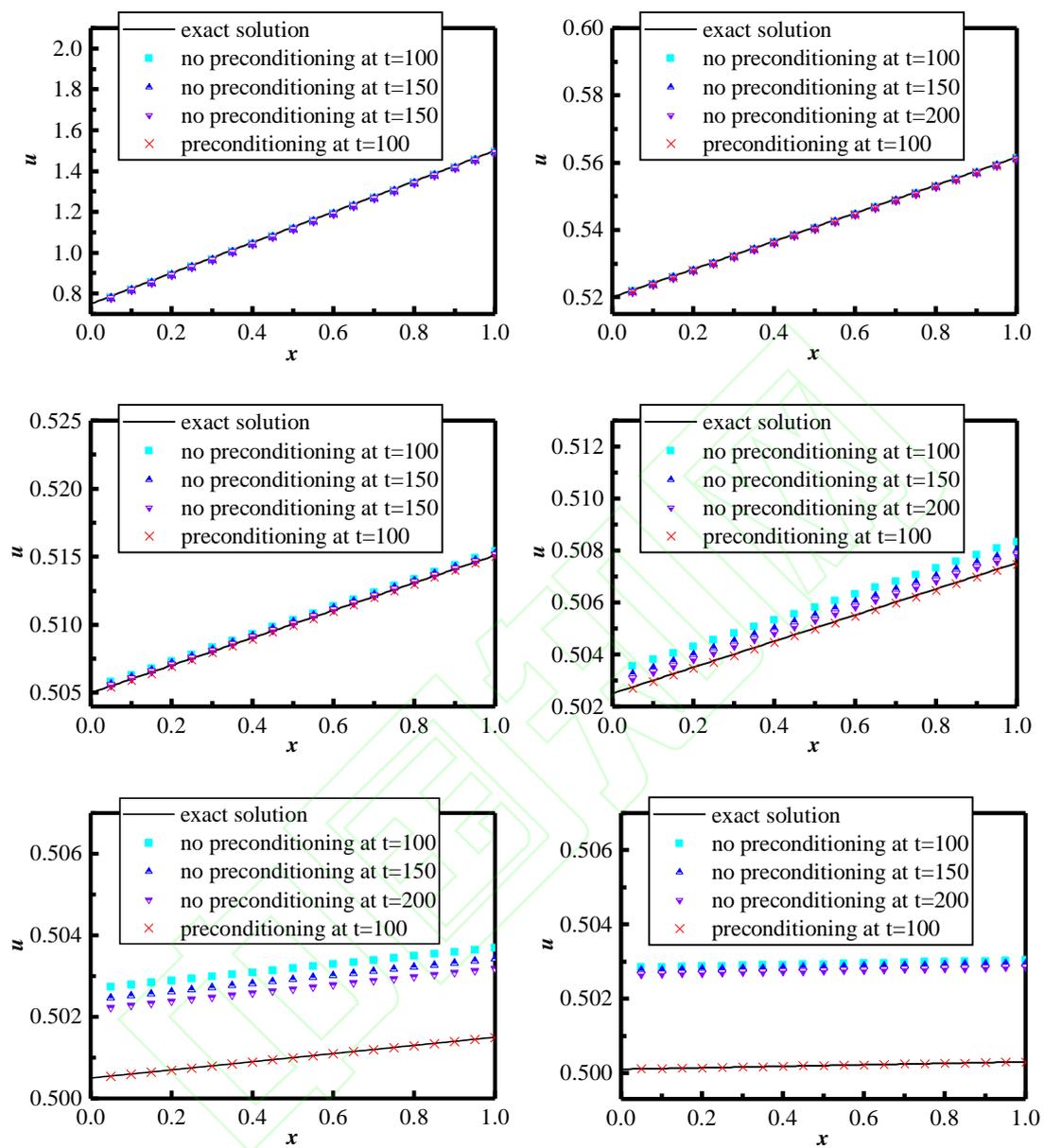


图 2 数值方法得到的解曲线与精确解曲线

(a) $k = 0.5$; (b) $k = 0.04$; (c) $k = 0.01$; (d) $k = 5 \times 10^{-3}$; (e) $k = 1 \times 10^{-3}$; (f) $k = 2 \times 10^{-4}$

Fig 2 The solution curves obtained by numerical solution and exact solution curves

(a) $k = 0.5$; (b) $k = 0.04$; (c) $k = 0.01$; (d) $k = 5 \times 10^{-3}$; (e) $k = 1 \times 10^{-3}$; (f) $k = 2 \times 10^{-4}$

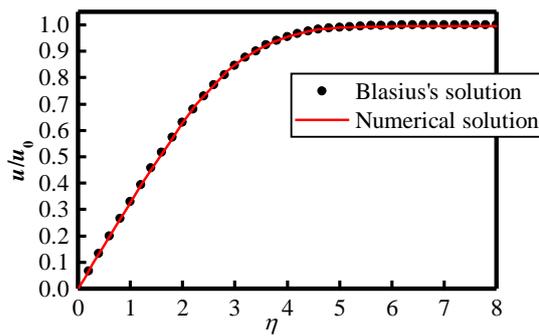


图3 $Ma = 0.1$ 时边界层流动的速度剖面
Fig 3 Velocity profile of the boundary layer flow when $Ma = 0.1$

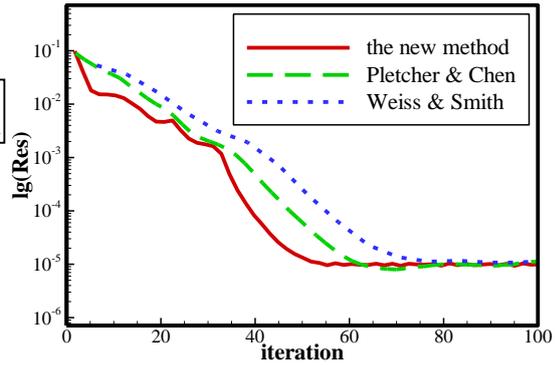


图4 边界层流动的收敛历程
Fig 4 Convergence histories of the boundary layer flow when $Ma = 0.1$.

本文预处理法的收敛速度同 Weiss & Smith 和 Pletcher & Chen 方法对比如图 4 所示. 可见, 本文的预处理方法得到的数值解与 Blasius 解基本一致. 由图 4 可见, 本文方法的收敛效率略好于 Weiss & Smith 和 Pletcher & Chen 方法.

5.3 空腔顶盖驱动

此算例描述的是一边长为 1(此算例中变量均无量纲化)的正方形空腔, 初始 Mach 数 $Ma_0 = 1$, 顶盖以 $u_0 = 1$ 速度向右运动, Reynolds 数分别为 100, 1000, 10000. 计算网格为 60×60 成中心对称的非均匀网格, 并在壁面附近加密, CFL=100, 分别使用本文预处理法和 Weiss & Smith 和 Pletcher & Chen 方法计算此问题. 图 5-图 7 是计算到收敛后得到的空腔内部流场线图, 可以观察到, 在空腔的几何中心附近产生一个大涡, 在底部两角附近产生两个较小的涡结构. 随着 Reynolds 数的增大, 大涡中心逐渐向空腔几何中心移动, 底部小涡逐渐增大, 当 Reynolds 数为 10000 时, 左上角附近也产生一个涡结构. 图 8 是水平与垂直中心线上速度与使用多重网格法的计算结果^[47]对比, 图 9 是三种预处理法的收敛速度对比.

通过图 8, 图 9 可知, 本文提出的方法精确度略高于 Weiss & Smith 和 Pletcher

& Chen 方法(这两种方法的精度对比可参考[46]). 本文方法的收敛速度也更快一些, 且随着粘性效应增加(Reynolds 数减小)效果越明显, 这表明本文格式可以实现对低速有粘问题的高精度高效率的模拟.

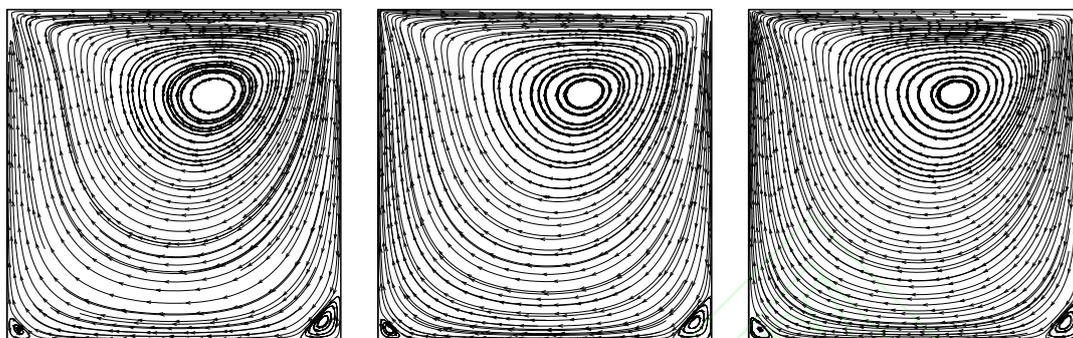


图 5 $Re = 100$ 时的空腔流线图 (a) 本文方法; (b) Weiss & Smith 方法; (c) Pletcher & Chen 方法

Fig 5 Velocity streamline diagram of cavity, $Re=100$

(a) the new method; (b) method of Weiss & Smith; (c) method of Pletcher & Chen

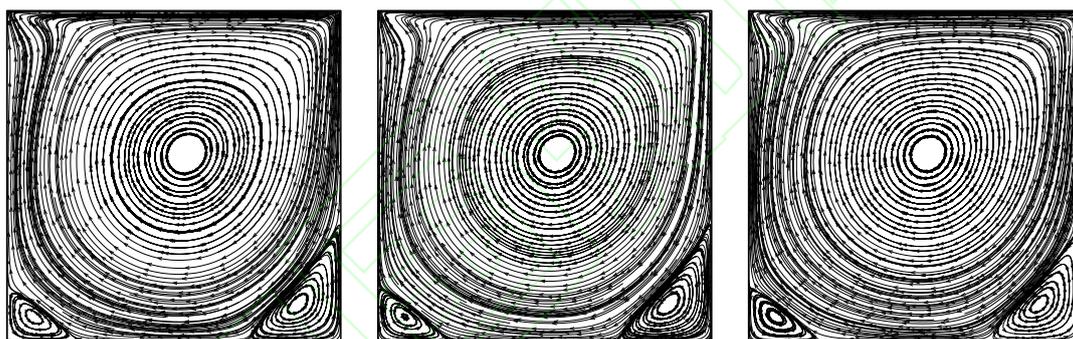


图 6 $Re = 1000$ 时的空腔流线图 (a) 本文方法; (b) Weiss & Smith 方法; (c) Pletcher & Chen 方法

Fig 6 Velocity streamline diagram of cavity, $Re=1000$

(a) the new method; (b) method of Weiss & Smith; (c) method of Pletcher & Chen

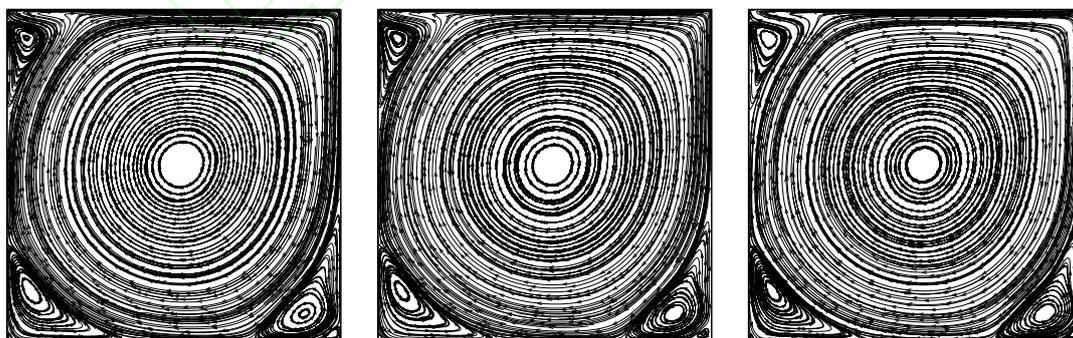


图 7 $Re = 10000$ 时的空腔流线图 (a) 本文方法; (b) Weiss & Smith 方法; (c) Pletcher & Chen 方法

Fig 7 Velocity streamline diagram of cavity, $Re=10000$

(a) the new method; (b) method of Weiss & Smith; (c) method of Pletcher & Chen

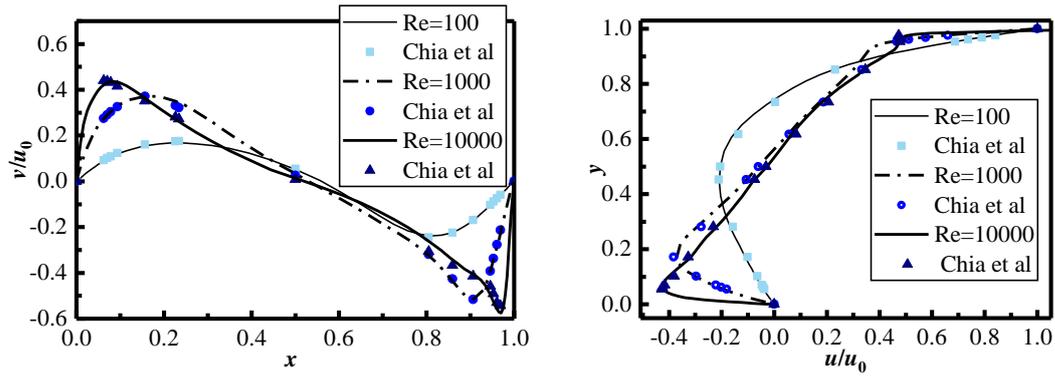


图 8 本文预处理后的中心线速度分布 (a)水平中心线上的速度 v ; (b)垂直中心线上的速度 u

Fig 8 Velocity along lines through geometric center calculated by the new method

(a) v -velocity along horizontal center line; (b) v -velocity along horizontal center line

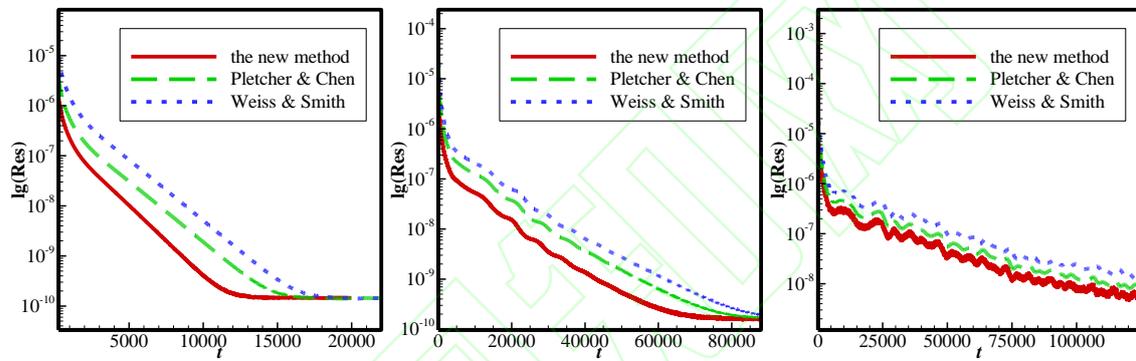


图 9 方腔流动的收敛历程对比 (a) $Re=100$; (b) $Re=1000$; (c) $Re=10000$

Fig 9 Convergence histories of the the laminar flow in a square cavity (a) $Re=100$; (b) $Re=1000$; (c) $Re=10000$

5.4 带凸鼓包的二维管道流动

此算例^[48]目的在于验证本文提出的预处理方法在曲线坐标系下的计算性能,故选择下表面带鼓包的二维管道流动问题,该算例模型和流场相对简单,便于对结果进行分析.具体模型如下,管道的长度为3(单位均无量纲化),高度为1,凸鼓包位于下表面的中心位置,长度为1,其尺寸为 $y=0.1\sin^2\pi x$, ($1 < x < 2$).计算网格选取 160×60 ,并在下表面处加密,具体见图10.来流Mach数选取为 $Ma_0=0.01, 0.05, 0.1$ 和 0.2 ,设 $p_0=1, T_0=1$,取 $CFL=5$,设置出口反压与来流值相等,整个流场无粘,故在壁面处的法向速度为0.

图11为三种方法的残差收敛曲线对比,图12(a)-图12(c)为 $Ma_0 = 0.05$ 时三

种方法得到的流场 Mach 数等值线分布，图 12(d)为在加密网格(600×200)下使用 Weiss & Smith 法计算得到的流场，并将其作为准精确解. 在低速流动下，该流场的 Mach 等值线接近轴对称. 可见本文方法的计算结果与准精确解基本一致，相比另外两种方法精度更高，尤其第 3-5 条等值线的位置. 另外本文方法的收敛效率也略高于其他方法，虽然 $Ma_0 = 0.2$ 时由于刚性并不是很大，加速收敛的效果比如更低的 Ma_0 时候明显，但最终的残差均小于其他预处理法，这说明本文格式在保证精度的同时，拥有更良好的稳定性.

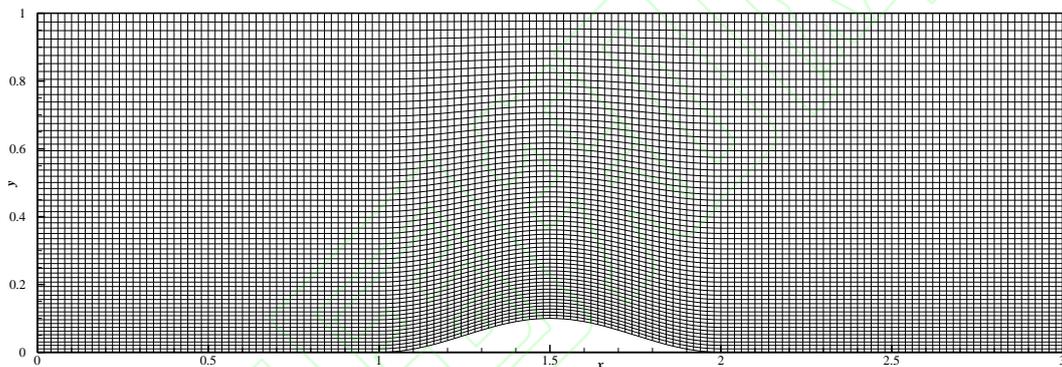
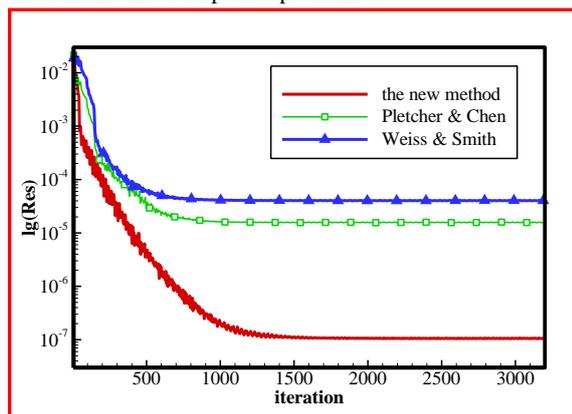
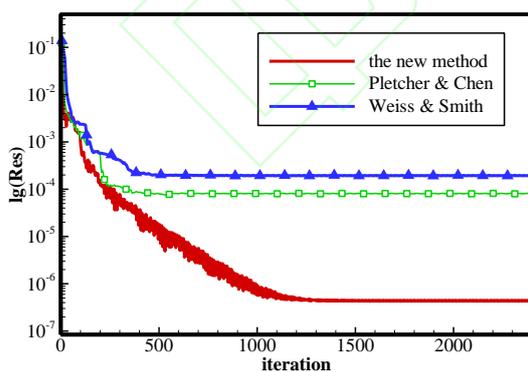


图 10 鼓包流动问题的计算网格

Fig 10 Computational grid for the 2d-dimensional bump flow problem



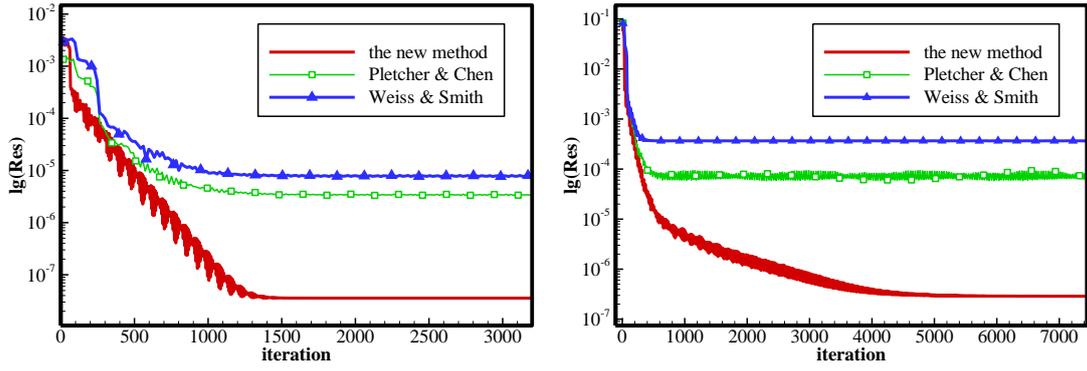
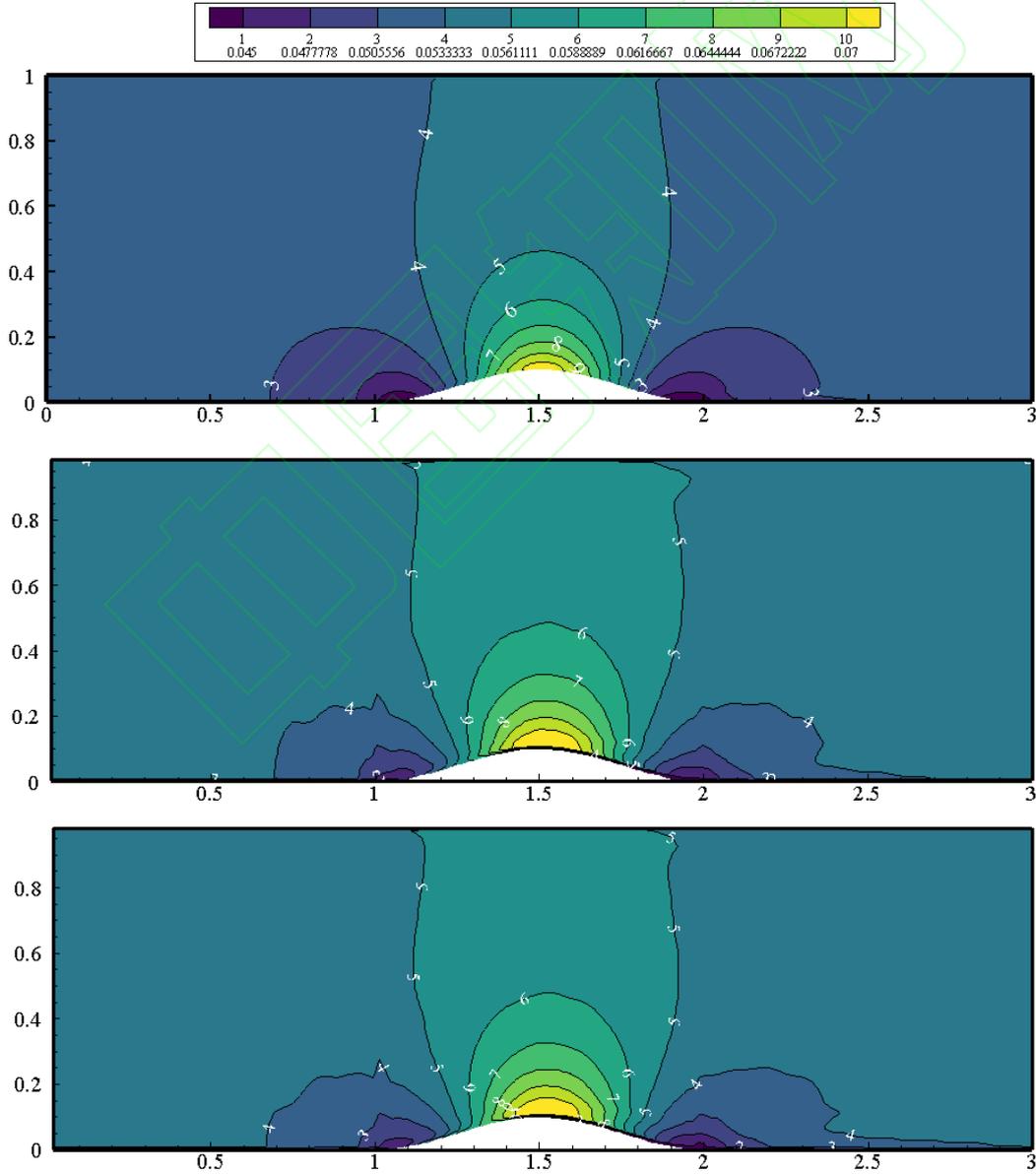


图 11 在不同 Mach 数下计算二维凸包管道问题的收敛历程 (a) $Ma_0 = 0.01$; (b) $Ma_0 = 0.05$; (c) $Ma_0 = 0.1$;
(d) $Ma_0 = 0.2$

Fig 11 Convergence histories of the the 2d-dimensional bump flow problem under different Mach numbers

(a) $Ma_0 = 0.01$; (b) $Ma_0 = 0.05$; (c) $Ma_0 = 0.1$; (d) $Ma_0 = 0.2$



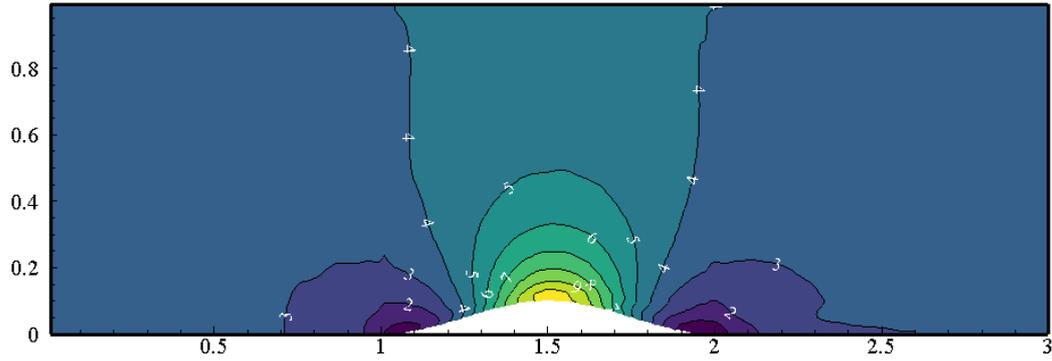


图 12 $Ma_0=0.05$ 时流场的等 Mach 线 (a) 精确解; (b) Weiss & Smith; (c) Pletcher & Chen; (d) 本文方法

Fig 12 Mach contour of the 2d-dimensional bump flow problem, $Ma_0 = 0.05$

(a) exact solution; (b) Weiss & Smith; (c) Pletcher & Chen; (d) the new method in this paper

6 结论

针对低速流动问题, 本文基于虚拟压缩法的思想, 提出一种以当地 Mach 数, 来流 Mach 数, 密度, 温度, 每个维度的分速度和 Reynolds 数为变量的预处理矩阵, 相比 Weiss, Choi, Dailey, Pletcher 和 Turkle 等人提出的矩阵, 把控制方程的刚性在 $Ma < 0.5$ 时进一步降低到 1 左右, 使得特征根之间的量级差异进一步减小, 从而提升了求解效率, 同时改进了从预处理到关闭预处理的过渡不够光滑的不足.

展开数值实验验证了新方法的可靠性. 通过一维算例验证了新方法的准确性, 将预处理和不处理的结果加以对比, 证明了预处理方法可加速计算低速流动问题的收敛. 通过平板层流边界层和粘性方腔流动问题进一步验证了本文方法在二维低速流动问题中可以获得高精度数值解, 并且拥有更高效的收敛性, 随着粘性作用越强, 这种高效性越明显. 通过二维鼓包管道流动问题, 验证了本文方法在曲线坐标系下仍能保持良好的精度和收敛性, 而且具备更好的稳定性. 目前本文重点在于改进算法, 故选取算例的结构比较简单, 未来将会尝试模拟复杂网格, 非定常流动或引入湍流模型.

致谢:

感谢中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室的李诗尧博士,天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室的陈嘉禹硕士为本文提供的计算资源;感谢天津大学数学学院 2018 级程启豪同学,南开大学数学学院学习部 2018 级左晨琛,2019 级的戚红利,2020 级赵振岐等同学为本文的矩阵特征系统在曲线坐标系下数学性质以及特定几何结构从笛卡尔坐标系下到曲线坐标下变换涉及的复分析和拓扑问题的讨论;感谢国防科技大学空天科学学院田正雨教授,南京航空航天大学航空学院陈红全教授,南京航空航天大学数学系张燕博士为本文提出建议。

参考文献

- [1] Yin P, Liandrat J, Shen W 2021 *J. Comput. Phys.* **434** 110207
- [2] Fernandez Fidalgo J, Nogueira X, Ramirez L, Colominas I 2018 *Comput. Method. Appl. M.* **335** 91
- [3] Ahmed T, Rehman A, Ali A, Qamar S 2021 *Results. Phys.* **23** 104078
- [4] Zhang Y, Liu Y, Zhang Y, Wang W R, Han Y F 2021 *Int. Commun. Heat. Mass.* **129** 105688
- [5] Xie W J, Tian Z Y, Zhang Y, Yu H 2022 *Comput. Fluids.* **233** 105215
- [6] Ma Chao, Wu J, Yu H, Yang L 2022 *Comput. Math. Appl.* **105** 13
- [7] Lehel F, Hona J 2021 *Chinese. J. Phys.* **73** 360
- [8] Zhang Q H, Li Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 130201 (in Chinese) [张庆海, 李阳 2021 物理学报 **70** 130201]
- [9] Xie W, Luo Z B, Zhou Y, Gao T X, Wu Y, Wang Q 2021 *Acta. Astronaut.* **188** 416
- [10] Barhoumi B, Bessrouf J 2017 *J. Comput. Phys.* **21** 86
- [11] Bykerk T, Verstraete D, Steelant J 2020 *Aerosp. Sci. Technol.* **103** 105883
- [12] Huber S E, Trummer M R 2016 *Comput. Math. Appl.* **71** 319

- [13] Hu J Y, Zhang W H, Chai Z H, Shi B C, Wang Y H 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 234701 (in Chinese) [胡嘉懿, 张文欢, 柴振华, 施保昌, 汪一航 2019 物理学报 **68** 234701]
- [14] Xin J J, Chen Z L, Shi F, Shi F L 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 044702 (in Chinese) [辛建建, 陈振雷, 石凡, 石伏龙 2020 物理学报 **69** 044702]
- [15] M.A.Imran, A.Shaheen El-Sayed M.Sherif, Mohammad Rahimi-Gorji, Asiful H.Seikh 2020 *Chinese. J. Phys.* **66** 60
- [16] Yin J F, You Y X, Li W, Hu T Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 044701 (in Chinese) [尹纪富, 尤云祥, 李巍, 胡天群 2014 物理学报 **63** 044701]
- [17] Niu H B, Yi S H, Liu X L, Huo J J, Gang D D 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 134701 (in Chinese) [牛海波, 易仕和, 刘小林, 霍俊杰, 冈敦殿 2021 物理学报 **70** 134701]
- [18] Li G H, Wang F X 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 054701 (in Chinese) [李高华, 王福新 2018 物理学报 **67** 054701]
- [19] Fasel M 1976 *J. Fluid. Mech.* **78** 355
- [20] Aziz K 1976 *Phys. Fluids.* **10** 314
- [21] Harlow F H, Welch J E 1965 *Phys. Fluids.* **8** 2182
- [22] Hirt C W, Nichols B D, Romero N C 1974 *Los Alamos Scientific Laboratory report* Los Alamos, N. Mex. U.S.A. p5852
- [23] Patankar S V, Spalding D B 1972 *Int. J. Heat. Mass. Tran.* **15** 1787
- [24] Patankar S V 1981 *Numer. Heat. Tra-Appl.* **4** 409
- [25] Van Doormaal J P, Raithby G D 1984 *Numer. Heat. Tra-Appl* **7** 147

- [26] W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, R. H. Pletcher, G. E. Schneider 1988 *Handbook of Numerical Heat Transfer* (New York: John Wiley & Sons) p241–289
- [27] Issa I R, Gosman A D, Watkins A P 1986 *J. Comput. Phys.* **62** 66
- [28] Davis G D V 1983 *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **3** 249
- [29] Chorin A J 1967 *J. Comput. Phys.* **2** 12
- [30] Turkel E 1993 *Appl. Numer. Math.* **12** 257
- [31] Choi D, Merkel C L 1987 *AIAA. J.* **23** 581
- [32] Angrand F, Dervieux A, Desideri J A, Glowinski R 1985 *Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics* (Philadelphia: Society for Industrial & Applied Mathematics) p519
- [33] Choi Y H, Merkle C L 1993 *J. Comput. Phys.* **105** 205
- [34] Buelow P E O, Venkateswaran S, Charles L 1993 *AIAA. J.* **32** 2401
- [35] Godfrey A G, Walters R W, Leer B V 1993 *31st Aerospace Sciences Meeting* 11 January 1993 - 14 January 1993 Reno, NV,U.S.A. p535
- [36] Weiss J M, Smith W A 1994 *Fluid Dynamics Conference* 20 June 1994-23 June 1994 Colorado Springs, CO, U.S.A. p2209
- [37] Pletcher R H, Chen K H 1993 *11th Computational Fluid Dynamics Conference* 06 July 1993-09 July 1993 Orlando,FL,U.S.A. p3368
- [38] Dailey L D, Pletcher R H. 1996 *Comput. Fluids.* **25** 791
- [39] Cheng X L 2007 *M.S. Thesis* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese) [成小磊 2007 硕士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]

- [40] Tan Q X, Ren J, Jiang H D 2015 *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)* **55** 134 (in Chinese) [谭勤学,任静,蒋洪德 2015 清华大学学报(自然科学版) **55** 134]
- [41] Buelow P. E. G. , Schwer D. A. , Feng F J , Merkle C L 1997 *13th Computational Fluid Dynamics Conference* Snowmass Village, CO, U.S.A. 29 June 1997 - 02 July 1997 p120
- [42] P. Roe 1981 *J. Comput. Phys.* **43** 357
- [43] Jiang G S, Shu C W 1996 *J. Comput. Phys.* **126** 202
- [44] Sun Z S, Yu H U, Luo L, Yang Z W 2014 *Sci. China. Phys. Mech.* **57** 971
- [45] Shu C W, S Osher 1988 *J. Comput. Phys.* **77** 439
- [46] Hu L Y 2011 *M.S. Thesis* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese)[胡丽燕. 2011 硕士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]
- [47] Ghia U, Ghia K N, Shin C T 1982 *J. Comput. Phys.* **48** 387
- [48] Delery J 1981 *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference* 23 June 1981 - 25 June 1981 Palo Alto, CA,U.S.A. p1245

A New Preconditioning Algorithm for Compressible Flow^{*}

Liu Bo¹⁾ Xing Pu¹⁾ Ding Song²⁾ Xie Ming-Jun³⁾ Feng Lin⁴⁾ Shi Xiao-Tian^{1)†}

1) (China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China)

2) (Large Aircraft Advanced Training Center, Beihang University, Beijing 100083, China)

3) (School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

4) (School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin 300074, China)

Abstract

Low velocity flows often exhibit incompressible properties, and one of the most prohibitive aspects of these problems is the large amount of computer resources required, including both CPU time and memory. Various numerical schemes used to calculate incompressible flow were constantly updated to accelerate convergence and reduce resource occupation, but incompressible flow is an ideal model for studying theoretical problems after all. In addition, it is a common phenomenon that high-speed and low-speed flow regions exist in a same system, and the influence of heat and volume force can not be ignored in some cases. The artificial compressibility method is based on the idea of using the numerical algorithms for compressible flows to solve incompressible flow. The system of compressible flow governing equations at very low Mach numbers is stiff due to the large disparity in acoustic wave speed, $u + c$, and the waves convected at fluid speed, u . The preconditioning algorithm is effective to change the eigenvalues of the compressible flow

equations system so as to remove the large disparity of wave speeds, and the essence is to multiply the time derivatives with a suitable matrix. A function in low growth rate with Mach number as variable is used to construct another new preconditioning matrix. The improvements effect of the new matrix on the both stiffness problem of the governing equations and smoothness of eigenvalues in all-speed domain are better than that of other matrices from Dailey, Weiss, Choi and Pletcher. A one-dimensional numerical example shows that the preconditioning matrix has ability to improve the efficiency of solving low-speed flow problems. These preconditioning matrices were extend to two-dimensional problems to simulate inviscid flow past a pipe with bulge and viscous flows past a flat and cavity, and the results indicate that the new matrix not only has better accuracy but also higher efficiency than Weiss's and Pletcher's.

Keywords: preconditioning ; compressible flow; astringency; numerical simulation

PACS: 47. 40. Dc; 47. 11. Bc; 47. 15. Rq; 47. 63. mc

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11872348, 11802297), and National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2019YFA0405300)